1/11/2015
مكثف 5 رياضة
AMR
M.r
(٩)

complex integration

$$\int_a^b F(z)\,dz = \int_c F(z)\,dz$$

← تكامل على مسار غير مغلق.

$$\oint_c F(z)\,dz$$ ← تكامل على مسار مغلق.

1) $\int_c F(z)\,dz = ??$

$F(z) = u + iv$
$z = x + iy$
$dz = dx + i\,dy.$

$$\int_c (u+iv)(dx+i\,dy)$$

$$= \int_c (u\,dx - v\,dy) + i\int_c (v\,dx + u\,dy)$$

———————

ex evaluate: $\int_c F(z)\,dz$ From $0+i$ to $2+5i$

where $F(z) = (3x+y) + i(x-2y)$

(a) along $y = x^2+1$

(b) along line From $(0,1)$ to $(0,5)$
and From $(0,5)$ to $(2,5)$

[b]

solution

[a]

$y = x^2 + 1 \longrightarrow dy = 2x\,dx$

$$\int ((3x+y) + i(x-2y))(dx + i\,dy)$$

$$\int_0^2 (3x + x^2 + 1) + i(x - 2x^2 - 2))(dx + i\,2x\,dx)$$

$(1 + i2x)\,dx$

$$\int_0^2 \left(3x + x^2 + 1) + i(x - 2x^2 - 2) + i(6x^2 + 2x^3 + 2x) - (2x^2 - 4x^3 - 4x)\right) dx$$

$$= \int_0^2 ((7x - x^2 + 4x^3 + 1) + i(3x + 4x^2 + 2x - 2)) \, dx$$

$$= \left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - x^4 + x) + i\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^2 - 2x\right)\right)\Big|_0^2$$

$$= (7*2 - \frac{8}{3} - 16 + 2) + i(3*2 + \frac{4*8}{3} + 4 - 4)$$

$$= \frac{88}{3} + i\,\frac{62}{3}$$

وبالمثل ق

[b]

Ex **evaluate** $\int_C 2z\,dz$ From $(-1,0)$ to $(-1,1)$

sol

$z = x + iy$ $\quad dz = dx + idy$

$\int (2x + i2y)(dx + idy)$

$= \int_0^1 (-2 + i2y)(0 + idy)$

$= \int_0^1 (-2i - 2y)\,dy$

$= (-2iy - y^2)\Big|_0^1 = -2i - 1$

حيث
$x = -1$
$dx = 0$

Ex 2-3 **evaluate:** $\int_C \bar{z}\,dz$ For $x = 2\cos t$, $y = \sin t$

From $t = 0$ to $t = \frac{\pi}{2}$

sol

$\bar{z} = x - iy$
$\bar{z} = 2\cos t - i\sin t$
$d\bar{z} = dx + idy$
$dz = -2\sin t + i\cos t$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t - i\sin t)(-2\sin t + i\cos t)\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\cos t\sin t + 2i\sin^2 t + 2i\cos^2 t + \sin t\cos t$

(d)

$$\int_0^{\pi/2} -3\cos t \sin t + 2i$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{-3}{2}\sin 2t + 2i = \left(\frac{3}{4}\cos 2t + 2ti\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-3}{4} + \pi i - \frac{3}{4} = \underline{\pi i - \frac{3}{2}}$$ ✱

Complex integration

(a) $\oint_C F(z)\, dz = 0$

إذا كانت الدالة $F(z)$ ليس لها مقام
و لا تحتوى على $\bar{z}$ أو $|z|$ أو أصفار المقام (analytic)
لا تقع داخل المنحنى C

(b) $\oint_C \frac{F(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i\, F(a)$

(c) $\oint_C \frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n F(z)}{dz}$

* إذا كانت الدالة تحتوى على مقام وصفره داخل المنحنى C.

الأفكار :- (a) تعويض مباشر.

(b) فيه أكثر من قوس في المقام وواحد منهم يقع داخل المنحنى , الباقى لا .

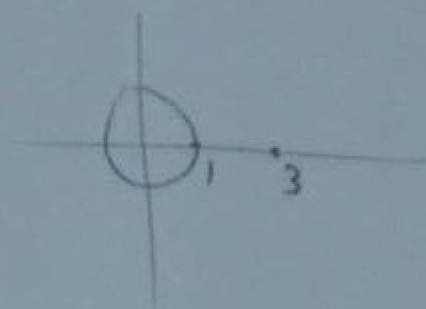
(c) فيه أكثر من قوس تحت يقع داخل المنحنى

$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$ نضبط النظرية.

evaluate

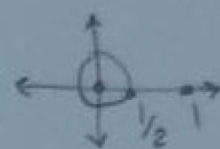
(a) $\oint_C e^{10z} = 0$

(b) $\oint_{|z|=1} \frac{z^3}{z-3} = 0$



(c) $\oint_C \text{sech}(z)\, dz = 0$

(d) $\oint_{|z|=1/2} \frac{2z-1}{z^2-z} = \oint \frac{2z-1}{z(z-1)}$



$= \oint \frac{\frac{2z-1}{(z-1)}}{z} = 2\pi i \left(\frac{-1}{-1}\right) = 2\pi i$

(e) $\oint_{|z|=6} \frac{7z-6}{z^2-2z} = \oint_{|z|=6} \frac{7z-6}{z(z-2)}$

$= \oint \frac{\frac{7z-6}{(z-2)}}{(z)} + \oint \frac{\frac{7z-6}{z}}{(z-2)}$

$= 2\pi i \left(\frac{-6}{-2}\right) + 2\pi i \left(\frac{7*2-6}{2}\right)$

$= 14\pi i$

F

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{2z^2}}{(z-i)^3} dt$$

$$\frac{d^2 e^{2z^2}}{dz^2} = 4z \cdot e^{2z^2} \cdot 4(4z^2 \cdot e^{2z^2}$$
$$+ 4e^{2z^2}$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}(-4 \cdot 4 \cdot e^{-2}) + 4e^{-2}$$

$$= \pi i \, [-12 e^{-2}]$$

* إثبات Cauchy's Integral formula

If $f(z)$ is analytic inside & on a simple closed curve C, then $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$. z_0 is a point inside C.

Sol

الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ دالة analytic ماعدا عند z_0.

نرسم مسار C_1 عبارة عن دائرة مركزها النقطة z_0

ونصف قطر $= \rho$ حيث ρ قيمة صغيرة $\xrightarrow{\text{تؤول}} 0$

وبذلك تصبح $\frac{f(z)}{z-z_0}$ analytic في المنطقة المحصورة بين $C_1 \subset C$

$$\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$C_1: \ |z-z_0| = \rho$ OR $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ — معادلة الدائرة مركزها z_0 ونصف قطرها $= \rho$

$$\therefore z = z_0 + \rho e^{i\theta} \rightsquigarrow dz = \rho i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \oint_{C_1} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}}\, \rho i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})\, i\, d\theta$$

$$= 2\pi i\, f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \simeq 2\pi i f(z_0)$$

as $\rho \to 0$

إثبات نظرية Cauchy-Goursat

$f(z) = u + i v \qquad z = x + i y \rightarrow dz = dx + i\,dy$

$$\therefore \oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u\,dx - v\,dy) + i\oint_C (v\,dx + u\,dy)$$

من نظرية Green عبر تحويل التكامل الخطى إلى تكامل ثنائي

$$\therefore \oint_C f(z)\,dz = \iint_R (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_R (u_x - v_y)\,dx\,dy$$

وحيث أن $f(z)$ analytic

$$\therefore u_x = v_y \quad \& \quad u_y = -v_x$$

$$\therefore \oint_C f(z)\,dz = 0$$